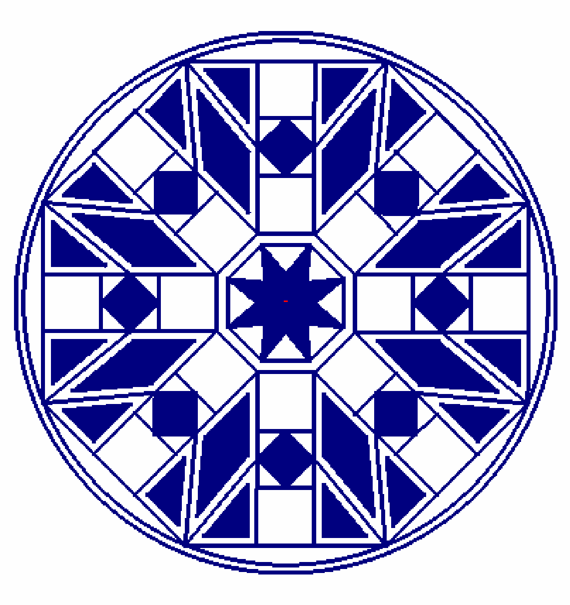
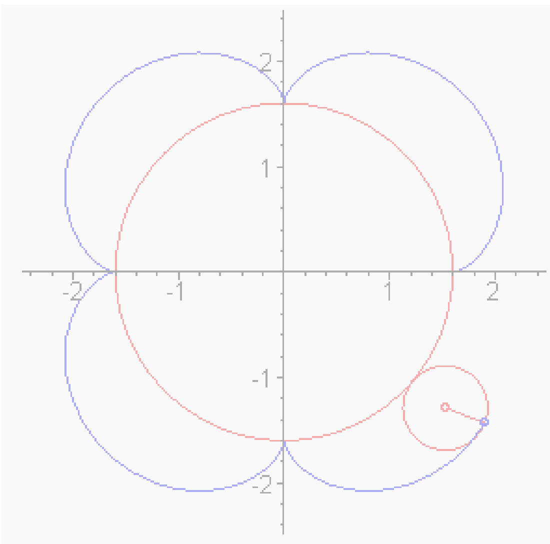
Problemas clásicos de geometría desde un punto de vista actual



GUÍA DEL PROFESOR



José Javier Escribano Benito

María Pilar Jiménez Pomar

María Teresa Pérez Álvarez

José Antonio Virto Virto

ÍNDICE

1. DESCRIPCIÓN

Este trabajo forma parte de un proyecto para desarrollar los currículos de geometría de las áreas de Matemáticas y Educación Plástica y Visual de la Educación Secundaria con ayuda de las Nuevas Tecnologías de la Información.

Se estructura en cinco módulos independientes: Geometría del Triángulo, Resolución de Triángulos, Cónicas, Cicloides, Fractales[1]. Y un Glosario Bibliográfico al que se accede por hipertextos en el que se citan personajes históricos que han realizado importantes aportaciones a la geometría.

Está realizado con diferentes lenguajes (*Microsoft FrontPage 2002, Dreamweaver 4, Maple V Release 5 v. 5.00, Cabri Géomètre II™, Cabri-Web, Macromedia Flash, JavaScript, Visual Basic 6.0, Visual Basic.NET*). Presentado en soporte electrónico, en lenguaje *HTML*, para que puedan ser **difundidos en Internet** y utilizados en el aula - en línea o en modo local - o en el hogar, por profesores y alumnos de forma **sencilla** sin precisar de conocimientos informáticos especiales. Y **sin necesidad de adquirir ninguna licencia ni de realizar pagos a terceros**.

Ha sido desarrollado (y **experimentado en el aula**) por un equipo de profesores de educación secundaria con una metodología que aúna los siguientes aspectos:

- *la introducción de las nuevas tecnologías de la información* en el marco de la tarea cotidiana en clase;
- el desarrollo de *la capacidad para encontrar respuestas* –no necesariamente únicas- *a problemas nuevos*;
- la necesidad de que el *currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo*;
- *la atención a la diversidad*, tanto de los alumnos que, por cualquier razón, presentan necesidades educativas espéciales, como de aquellos que desean profundizar y ampliar sus conocimientos.

[1] Para realizar las secciones de Geometría del Triángulo y Cónicas hemos contado con dos ayudas para "Proyecto de Innovación e Investigación Educativa en Materia de Utilización Didáctica de las Tecnologías de Información y Comunicación" (Orden 23/2002 de 30/5/2002 y Orden 21/2003 de 13/2/2003) de la Consejería de Educación, Cultura, Juventud y Deportes del Gobierno de La Rioja.

Geometría del triángulo	Puntos notables Teorema de Tales Teorema de Pitágoras Teoremas de Menelao y Ceva Teorema de Viviani Teorema de Desargues Teorema de Varignon Triángulo órtico Rectas notables Teorema de Malfatti Triángulos de Napoleón Circunferencia de los nueve puntos Teorema de Morley
Resolución de triángulos	Resolución gráfica de triángulos Resolución gráfica y trigonométrica de triángulos
Cónicas	Las cónicas Circunferencia Elipse Hipérbola Parábola Aplicaciones físicas
Cicloides	Cicloides y Ruletas Cicloide Epicicloide Hipocicloide
Fractales	Árbol Cristal de nieve Anticristal de nieve Alfombra de Sierpinski Curva de Sierpinski Curva de Hilbert Curva de dragón Curva de Mandelbrot
Glosario Bibliográfico	

Esquema de contenidos

2. JUSTIFICACIÓN

"Sin la técnica el hombre no existiría
ni habría existido nunca"
(Ortega y Gasset, *Meditación de la técnica*)

La irrupción de las nuevas tecnologías de la información en la vida cotidiana y en la Educación ha creado numerosas expectativas. Si, gracias a la técnica el hombre domina la naturaleza y se afirma frente a ella (Ortega), los nuevos medios inducen también vertiginosos cambios en los modos de trabajar, divertirse, conocer,… en definitiva de vivir.

El lenguaje audiovisual y la interacción de los niños y adolescentes con los ordenadores en los juegos interactivos, búsqueda en Internet, conversaciones en *chat,* etc., mediatiza la interpretación de la información que les llega a través de cualquier medio. La mayoría de ellos están acostumbrados a utilizar dispositivos, máquinas, teléfonos móviles y ordenadores, con lo que se han habituado a un nuevo código de expresión y comunicación diferente a la tradicional expresión oral y escrita. Todo esto sugiere que los medios informáticos son instrumentos que pueden favorecer el aprendizaje y así lo han entendido las instituciones públicas que vienen dedicando a lo largo de los años importantes recursos para potenciar el acceso de nuestros escolares a las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación.

Sin embargo, estas tecnologías todavía no se han incluido en las aulas de forma generalizada y constituyen actividades de tipo "extraordinario" o especial, por una serie de razones, entre otras, la dificultad que conlleva el aprendizaje y manejo de ciertas aplicaciones informáticas. Estas dificultades se hacen particularmente notables en la educación secundaria, en la que una parte significativa de los alumnos (y también algunos profesores) rechaza el aprendizaje de estas aplicaciones, por considerar que forman parte de un "currículo paralelo" que supone un esfuerzo adicional y quizás una rémora para lograr los objetivos del currículo oficial.

Por otro lado, los tutoriales demasiado rígidos o que dejan poca iniciativa al usuario no siempre se adaptan a la heterogeneidad de nuestras aulas y a las características de nuestro sistema educativo (fuertemente descentralizado, donde las comunidades autónomas, los centros y los propios profesores gozan de gran libertad para concretar y desarrollar los currículos).

Por todo ello, nuestra propuesta se basa en un sistema multimedia, desarrollado en el aula, abierto, que sea fácil de utilizar y que se integre las actividades habituales del aula.

"Nadie entre aquí que no sepa geometría"
(Platón)

El desarrollo de la intuición espacial es una realidad básica de nuestra cultura por la importancia de imaginar situaciones y esquemas tridimensionales e interpretar planos, y de forma más general de tener referencias de orientación y estructuración en el espacio. Esta idea que está recogida en los objetivos que el MEC ha marcado para las matemáticas de la E.S.O.: "Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implícitas y siendo sensible a la belleza que generan"[2], ha llevado a la renovación de los programas con la inclusión de contenidos geométricos.

Sin embargo pensamos que la importancia que actualmente se da a esta materia sigue siendo insuficiente y que el estudio de la geometría en su función formativa se hace tan esencial como clásicamente lo fue, pues presenta valores insustituibles que R. Thom resume así:

> "1) La geometría proporciona uno o más puntos de vista, o modos de ver, en todas las áreas de las matemáticas aproximadamente.
> 2) Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de las matemáticas.
> 3) Las técnicas geométricas proporcionan eficaces útiles para resolver problemas en casi todas las áreas de las matemáticas"[3].

3. OBJETIVOS GENERALES

1. Predisponer al alumno a la reflexión, la interrogación, y al método científico.
2. Posibilitar el pensamiento divergente.
3. Desarrollar la creatividad a través de problemas, donde los conocimientos para aplicar son sencillos, cuya solución no es necesariamente única y se puede además llegar a ella de diversas maneras.
4. Introducir gradualmente la idea de demostración.
5. Desarrollar el sentido estético mediante la elaboración de cuestiones geométricas.
6. Desarrollar la intuición espacial.
7. Favorecer el desarrollo de destrezas procedimentales y la capacidad para elaborar estrategias propias en la resolución de problemas, en los alumnos con dificultades de comprensión de los conceptos elementales de geometría.
8. Conjugar el aprendizaje de conceptos y procedimientos de la geometría bajo el punto de vista de las Matemáticas, la Física y el Dibujo Técnico de Enseñanza Secundaria.
9. Introducir al alumno en el campo de las ayudas que el ordenador puede ofrecer a la persona para que ésta se dedique más a desarrollar sus capacidades intelectuales
10. Utilizar el ordenador para favorecer el proceso de aprendizaje a través de la propia acción del alumno.
11. Facilitar el conocimiento, a grandes rasgos, de la evolución histórica de la geometría.

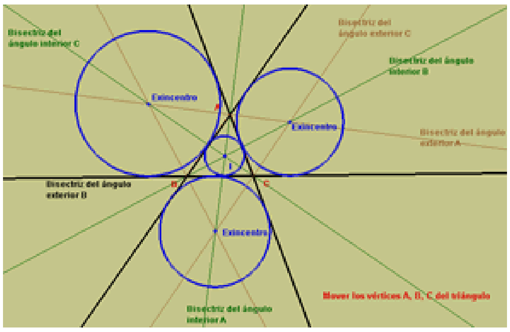
[2] *R.D. 1345/1991 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.*
[3] THOM, R. (1973) *Developments in Mathematical Education*, pp. 194-212.

Apreciar el desarrollo de la geometría como un proceso cambiante y dinámico, íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber. Mostrar una mentalidad abierta a los problemas que la continua evolución científica y tecnológica plantea la sociedad.

4. GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

4.1. Introducción

> "En la mayor parte de las ciencias una generación derriba lo que otra había construido, y lo que uno parecía haber demostrado firmemente otro lo deshace. Sólo en las matemáticas cada generación construye un nuevo piso sobre la vieja estructura" (Hermann Hankel).



La idea de realizar una recopilación de problemas históricos de geometría se remonta a 1985 cuando leímos un breve articulo del profesor D. Luis Vigil: "Miscelánea de problemas clásicos de geometría elemental"[4]. Vigil recorría la historia de la geometría para mostrarnos una serie de ejemplos que le servían de coartada para expresar una idea clave: "hacer renacer la Geometría de siempre en los planes de estudio de la Segunda Enseñanza".

Con esta objetivo iniciamos una colección heterogénea de problemas geométricos que hemos ido completando a lo largo de más de veinte años de docencia de la matemática. De esta miscelánea hemos elegido ahora una muestra confeccionada con los siguientes criterios:

- Que recoja todos los contenidos que sobre esta materia contemplan los currículos de Matemáticas, Educación Plástica y Visual, Dibujo Técnico y Matemáticas de la Forma de la Educación Secundaria.
- Que el proyecto pueda ser utilizado como material de apoyo a lo largo de toda la educación secundaria (ESO y Bachillerato) en las asignaturas de Matemáticas y Educación Plástica.
- Que cada uno de las actividades propuestas tenga, por sí misma, relevancia dentro de la geometría. Así, por ejemplo el teorema de Tales se incluye por ser la base del concepto de escala y de las razones trigonométricas; el teorema de Desargues nos permite introducir la geometría proyectiva, …
- Que el conjunto de todas ellas ofrezca una panorámica de la evolución del pensamiento geométrico a lo largo de la historia, desde la Época Heroica hasta el final del siglo XIX, cuando la matemática rompe –se libera- con el espacio euclídeo tridimensional. Esta

[4] VIGIL, L. (1985) "Miscelánea de problemas clásicos de geometría elemental". En: AAVV, *Aspectos didácticos de Matemáticas 1. Bachillerato*. Zaragoza, ICE de la Universidad de Zaragoza, 66-89.

panorámica histórica y cultural se refuerza con la inclusión de reseñas biográficas de los principales matemáticos, a las que se accede mediante hipervínculos.

4.2. Descripción

El material se agrupa en doce apartados. Aunque se puede acceder a cada uno de ellos de forma independiente, merece la pena incidir en que se trata de una muestra configurada con criterios didácticos globales y no una yuxtaposición de ejercicios independientes.

▪ Introducción ▪ Puntos notables o Circuncentro o Incentro o Exincentros o Ortocentro o Baricentro o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Tales o Introducción o Figura 1 o Figura 2 o Figura 3 o Teorema Recíproco de Tales o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Pitágoras o Introducción o Demostración de Euclides o Demostración de Garfield o Actividades I o Actividades II o Referencias ▪ Teoremas de Menelao y Ceva o Teorema de Menelao o Teorema de Ceva o Teorema recíproco de Ceva o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Viviani o La matemática en el siglo XVII o Teorema de Viviani o Coordenadas trilineales o Punto Fernat o Construcción del punto de Fermat o Actividades o Referencias	▪ Teorema de Desargues o Perspectiva: la ciencia de los pintores o Hacia la geometría proyectiva o Teorema de Desargues o Teorema de Pascal o Teorema de Brianchon o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Varignon o Teorema de Varignon o Actividades o Referencias ▪ Triángulo órtico o Problema de Fagnano o Triángulo órtico o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Malfatti o Teorema de Malfatti o Círculos de Malfatti o Puntos de Malfatti o Actividades o Referencias ▪ Triángulos de Napoleón o Primer triángulo o Segundo triángulo o Actividades o Referencias ▪ Circunferencia de los nueve puntos o Circunferencia de los nueve puntos o Circunferencia de los seis puntos o Actividades o Referencias ▪ Teorema de Morley o Teorema de Morley o Actividades o Trisección de un ángulo o Referencias

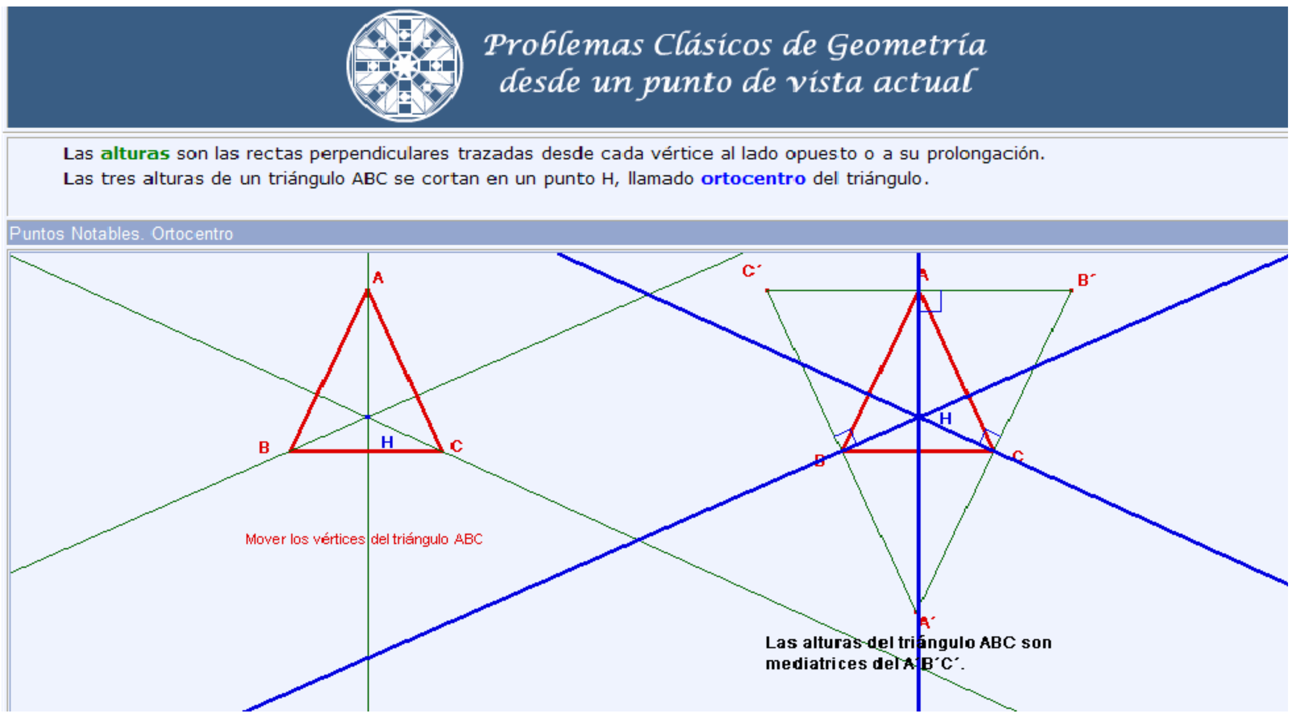
Geometría del Triángulo

En general, cada uno de estos apartados consta de los siguientes puntos:

- Introducción histórica.
- Propiedades.
- Actividades propuestas.
- Referencias bibliográficas y de páginas web.

Las propiedades se exponen en una pantalla dividida en tres partes:

- Enunciado de la propiedad.
- Figura Interactiva, presentado en *Cabri-Web*, que permite al alumno comprobar de forma interactiva que las propiedades geométricas se verifican cualesquiera que sean los datos iniciales y establecer nuevas hipótesis.
- Descripción de la construcción y, en los casos más sencillos, demostración de la propiedad.



Aunque las actividades propuestas suelen ser geométricas, también hemos incluido algunas de tipo aritmético para reforzar aquellas partes del currículo en las que los alumnos tienen mayores dificultades y mostrar el carácter unitario de las matemáticas.

13. En todo triángulo la bisectriz se encuentra entre dos de las líneas trazadas desde el mismo vértice, ¿cuáles son? (S: la mediana y la altura)
14. Comprobar que en un triángulo, el incentro, un exincentro y los dos vértices que forman el lado correspondiente al exincentro están en la misma circunferencia y el centro de esta circunferencia está sobre la circunferencia circunscrita.
15. Si en un triángulo un ángulo es 120º, ¿qué clase de triángulo forman los pies de las bisectrices? (S: rectángulo).
16. El punto de Gergonne (Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859) aparece al unir los vértices de un triángulo con los puntos de tangencia de su circunferencia circunscrita.
17. Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los correspondientes puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas son concurrentes. Al punto común a esas tres rectas se le llama punto de Nagel (Christian Heinrich von Nagel, 1803-1882).

6. Los *cuadrados mágicos* están formados por números colocados de tal forma que las sumas de estos números en filas, columnas y diagonales son iguales, esta suma común se llama *número mágico*. Por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

es un cuadrado mágico de orden 3 cuyo número mágico es el 15. Cuenta la leyenda que este cuadrado, llamado *Lho shu*, fue comunicado a los hombres por una tortuga del río Lo en la época del emperador Yu hace 5.000 años. Demuestra que sólo hay un tipo de cuadrados de orden 3 que puede expresarse del siguiente modo:

$a+b$	$a-(b+c)$	$a+c$
$a-(b-c)$	a	$a+(b-c)$
$a-c$	$a+(b+c)$	$a-b$

Donde a, b y c son tres números enteros cualesquiera.
Sin embargo, la construcción de cuadrados mágicos de orden superior a tres se hace muy complicada y tan sólo para los de orden impar es posible encontrar algunas fórmulas generales. La insospechada dificultad de estos cuadrados intrigó a los chinos, a los árabes, a la cultura hindú de la India y posteriormente a los matemáticos y artistas del Renacimiento como de La Hire o Durero que incluyó uno de estos cuadrados en su célebre grabado "Melancolía". Tal vez Durero eligió este cuadrado porque los dos números centrales de la última fila coinciden con la fecha de ejecución del grabado: 1514.

¿Sabrías encontrar más cuadrados mágicos similares a este?

Todavía más difícil resulta la construcción de un *cubo mágico*:

4	62	63	1	53	11	10	56	60	6	7	57	13	51	50	16
41	23	22	44	32	34	35	29	17	47	46	20	40	26	27	37
21	43	42	24	36	30	31	33	45	19	18	48	28	38	39	25
64	2	3	61	9	55	54	12	8	58	59	5	49	15	14	52

13	51	50	16	4	62	63	1
40	26	27	37	41	23	22	44
28	38	39	25	21	43	42	24
49	15	14	52	64	2	3	61

Superponiendo estos cuatro cuadrados mágicos, Fermat obtuvo un cubo mágico: la suma de los números sobre cada dirección paralela a las aristas, o los de las diagonales, es constante, igual a 130.

4.3. Relación con el currículo

	Primer Ciclo ESO	3º ESO	4º ESO
MATEMÁTICAS	**Objetivos.** - Conocer los triángulos y las líneas y puntos notables. - Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea.	**Objetivos.** - Reconocer los triángulos como figuras rígidas y valorar las posibilidades que presenta este hecho en el mundo de la construcción. - Identificar las rectas y puntos notables de un triángulo así como reconocer sus propiedades. - Reconocer las relaciones métricas entre los lados de un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras tanto para estudios en el plano como en el espacio.	**Objetivos.** - Definir el teorema de Tales como la expresión de la relación de proporcionalidad entre segmentos de dos o más rectas cortados por paralelas.
	Contenidos. **GEOMETRÍA. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DEL PLANO.** - El triángulo: elementos, relaciones, clasificación y rectas notables - Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. - Razón de semejanza. Escalas. - Aproximación al teorema de Tales.	**Contenidos.** ***GEOMETRÍA. EL ESTUDIO DEL TRIANGULO. GEOMETRÍA DEL PLANO.*** - Estudio del triángulo. Criterios de igualdad. - Datos para determinar un triángulo y para reconocerlo igual o diferente a otros. - Líneas y puntos notables. - Propiedades de mediatrices, medianas y alturas - Relaciones en el triángulo rectángulo. - Profundización en el Teorema de Pitágoras.	**Contenidos.** ***SEMEJANZA.*** - Relación de semejanza. Teorema de Tales. - Figuras semejantes. Razón de semejanza. - Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza de triángulos.

	1º BACHILLERATO	2º BACHILLERATO
MATEMÁTICAS	**Objetivos.** - Obtener un punto o conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.	
	Contenidos. ***GEOMETRÍA ANALITICA.*** - Mediatriz de un segmento. - Bisectriz de un ángulo.	
DIBUJO TÉCNICO	**Objetivos.** - Identificar la figura plana más sencilla, el triángulo. - Conocer sus clases y las líneas y puntos notables. - Construir un triángulo a partir de lados y ángulos del mismo.	**Objetivos.** - Identificar la figura plana más sencilla, el triángulo. - Conocer sus clases y las líneas y puntos notables. - Construir un triángulo a partir de lados y ángulos del mismo.
	Contenidos. ***CONSTRUCCIÓN DE FORMAS POLIGONALES. TRIÁNGULOS.*** -Triángulos. Definiciones y clases. - Líneas y puntos notables de un triángulo.	**Contenidos.** ***CONSTRUCCIÓN DE FORMAS POLIGONALES. TRIÁNGULOS.*** -Triángulos. Definiciones y clases. - Líneas y puntos notables de un triángulo.

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

5.1. Introducción

A menudo, surge la necesidad de efectuar medidas que supondrían un penoso trabajo si hubiera que realizarlas sobre el terreno, de ahí que se obtengan de forma indirecta a partir de otras más fáciles de realizar. En la sección de *Geometría del Triángulo* abordamos el *Teorema de Tales* y el *Teorema de Pitágoras* que constituyen la primera base teórica. Ahora completamos este estudio con otro tema clásico en todos los currículos de la Educación Secundaria: *la Resolución de Triángulos*.

5.2. Descripción

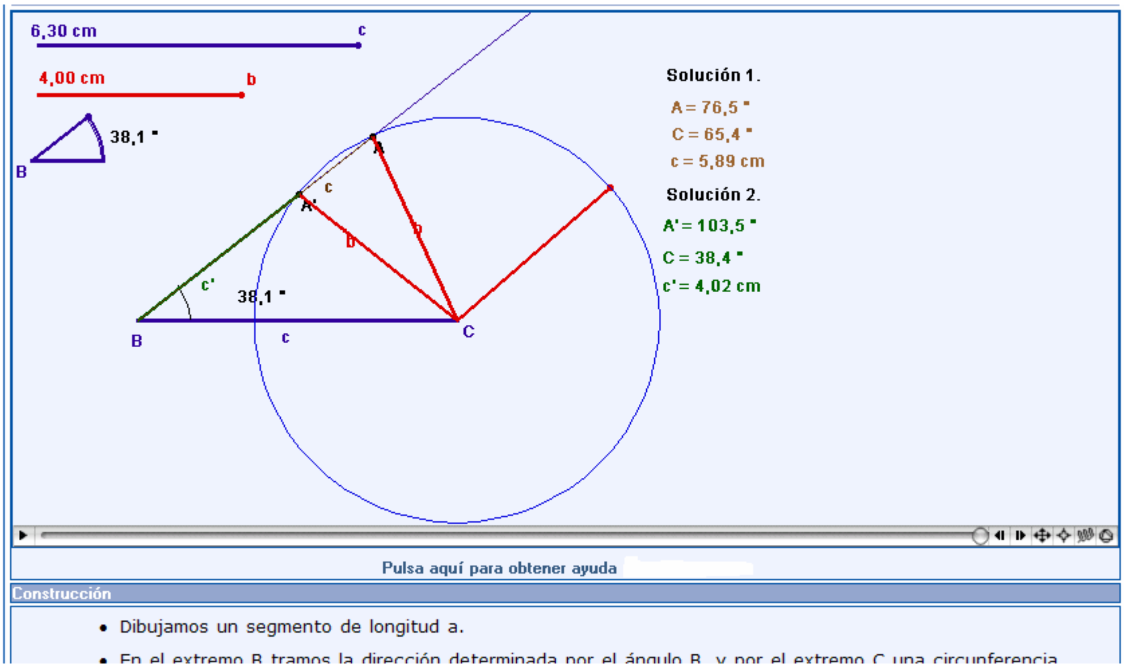
Los contenidos están agrupados en dos apartados:

- Resolución gráfica de triángulos

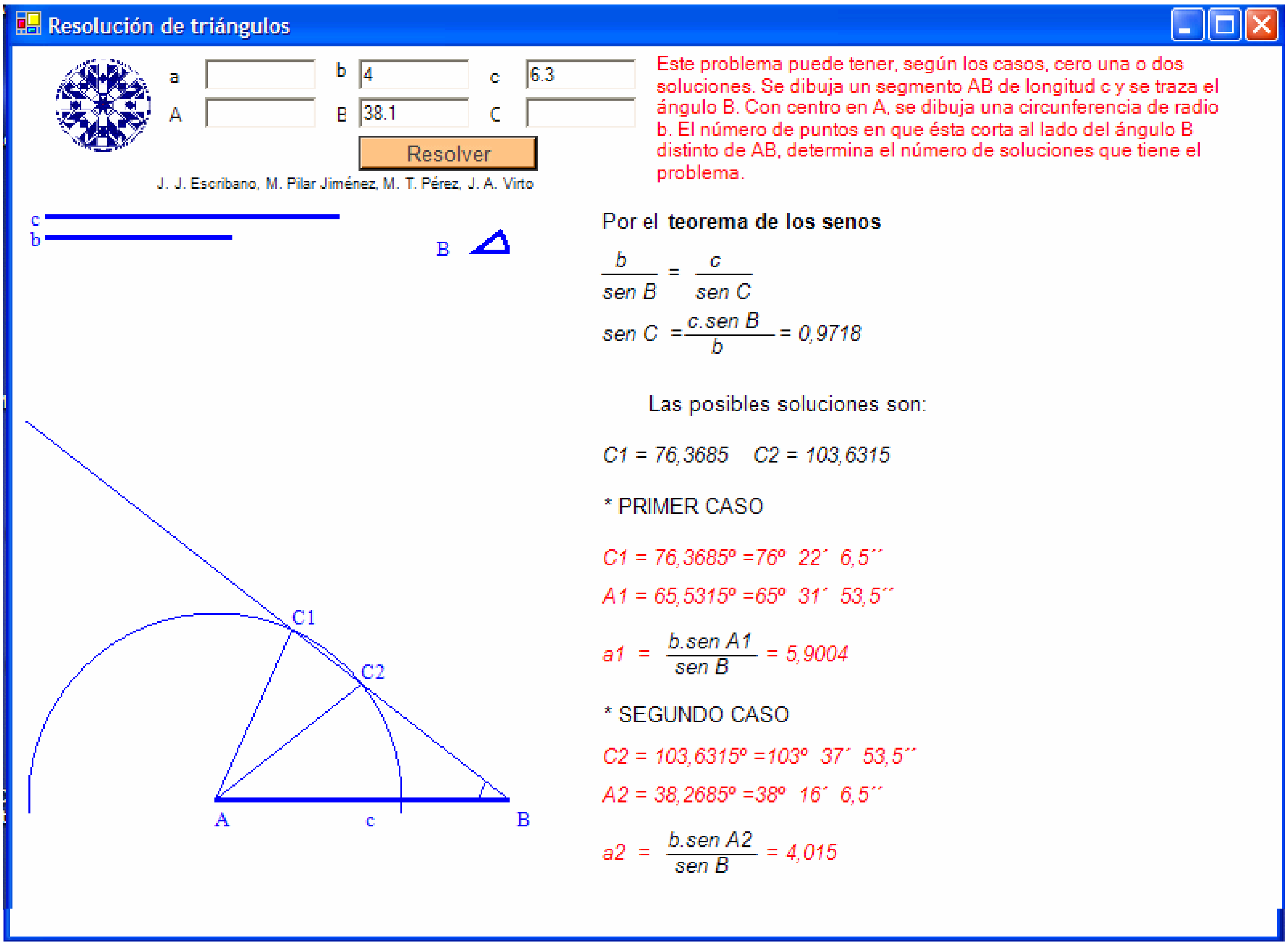
Permite la resolución grafica de un triángulo cualquiera de forma interactiva.

- Resolución de triángulos

Descarga una calculadora gráfica, realizada en *Visual Basic.NET*, que permite resolver triángulos en dos pantallas: se introducen los datos y el programa efectúa los cálculos y muestra simultáneamente la solución numérica (junto a las fórmulas trigonométricas utilizadas) y la solución gráfica (con la explicación del proceso).



Resolución gráfica de triángulos



Resolución de triángulos

Nota: Observe que en el primer caso se utiliza la coma decimal (6,3 38,1) y en el segundo el punto (6.3)

5.3. Relación con el currículo

	4º ESO	1º BACHILLERATO
MATEMÁTICAS	**Objetivos.** - Aplicar los conocimientos sobre semejanza a diversas situaciones de la vida real como por ejemplo el cálculo de distancias en mapas y planos usando las escalas. - Utilizar los conocimientos trigonométricos para efectuar mediciones indirectas relacionadas con situaciones tomadas de contextos cotidianos. - Conocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo. - Relacionar las razones trigonométricas de un mismo ángulo (relaciones fundamentales).	**Objetivos.** - Conocer las razones trigonométricas de cualquier ángulo - Relacionar las razones trigonométricas de un mismo ángulo. - Resolver cualquier tipo de triángulo. - Efectuar medidas de situaciones tomadas de la realidad.
	Contenidos. *TRIGONOMETRÍA* - Utilización de representaciones a escala para medir magnitudes reales - Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente. - Relación entre las razones trigonométricas del mismo ángulo. Relaciones fundamentales. - Razones trigonométricas de ángulos muy interesantes en geometría (de 30º, 45º y 60º).	**Contenidos.** *RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.* - Razones trigonométricas de un ángulo agudo. - Relaciones entre las razones trigonométricas. - Razones trigonométricas de ángulos obtusos. - Teorema de los senos. - Teorema del coseno. - Resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos.

	4º ESO	1º BACHILLERATO
E. PLÁSTICA		**Objetivos.** - Construir triángulos a partir del conocimiento de sus elementos.
		Contenidos. *RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO. ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES.* - Análisis y construcción de triángulos en los que intervengan elementos notables.
MATEMÁTICAS DE LA FORMA		**Objetivos.** - Conocer las razones trigonométricas de un ángulo. - Aplicar los conocimientos de trigonometría para el cálculo de distancias.
		Contenidos. - Razones trigonométricas. Proporciones notables.

5.4. Orientaciones didácticas

Junto con las actividades habituales de resolución de triángulos numéricos, proponemos que los alumnos resuelvan problemas prácticos tomados de la vida cotidiana (altura de edificios, anchura de un río...) combinando los métodos tradicionales con las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación.

Para ello, los alumnos toman medidas *in situ* con goniómetro o teodolito, longitudes de sombras, imágenes de espejos,… para calcular la altura de edificios, monumentos, estatuas, puentes, u otras construcciones o accidentes singulares de la población en la que residen, procurando abarcar todos los casos posibles de resolución de triángulos.

Una vez realizadas estas mediciones, los alumnos proceden a resolver el problema:

- Los de Bachillerato mediante la calculadora gráfica.
- Los de ESO mediante la *Resolución Gráfica de Triángulos*. Para ello, representan a escala en el ordenador y utilizan esta representación para de deducir las magnitudes buscadas[5]. El resultado es un método atractivo, asequible a la mayoría de los alumnos, que sustituye los cálculos trigonométricos por construcciones gráficas en el ordenador.

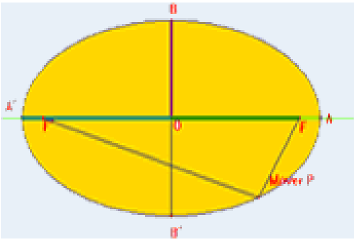
[5] Se trata de desarrollar de forma sistemática el procedimiento "Utilización de representaciones a escala para medir magnitudes reales" (RD 1345/1991, por el que se establece el currículo de la ESO), sustituyendo la regla y el transportador de ángulos (que darían lugar a medidas poco precisas) por el ordenador.

6. CÓNICAS

6.1. Introducción

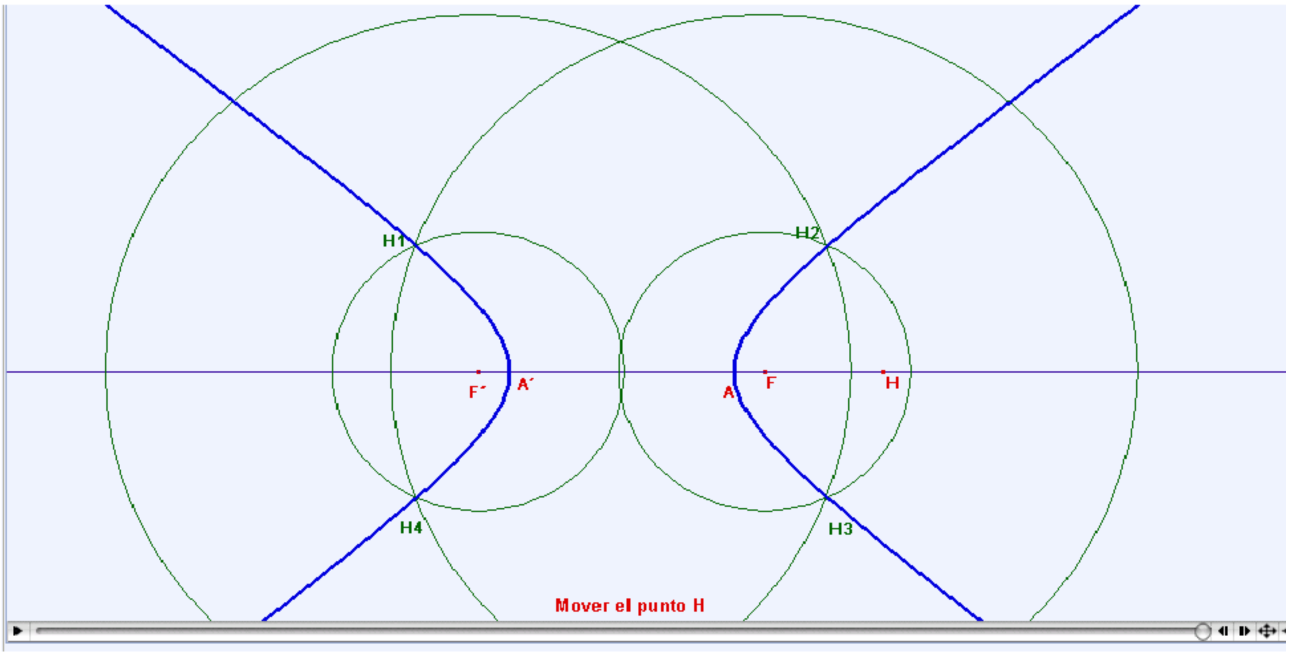
Las cónicas están presentes en la vida cotidiana, en la naturaleza, en el arte. Por ello, su estudio nos ofrece una buena oportunidad para resaltar el carácter instrumental de las matemáticas: "La Matemática es el modo de comprender el mundo" (*Pitágoras)*.

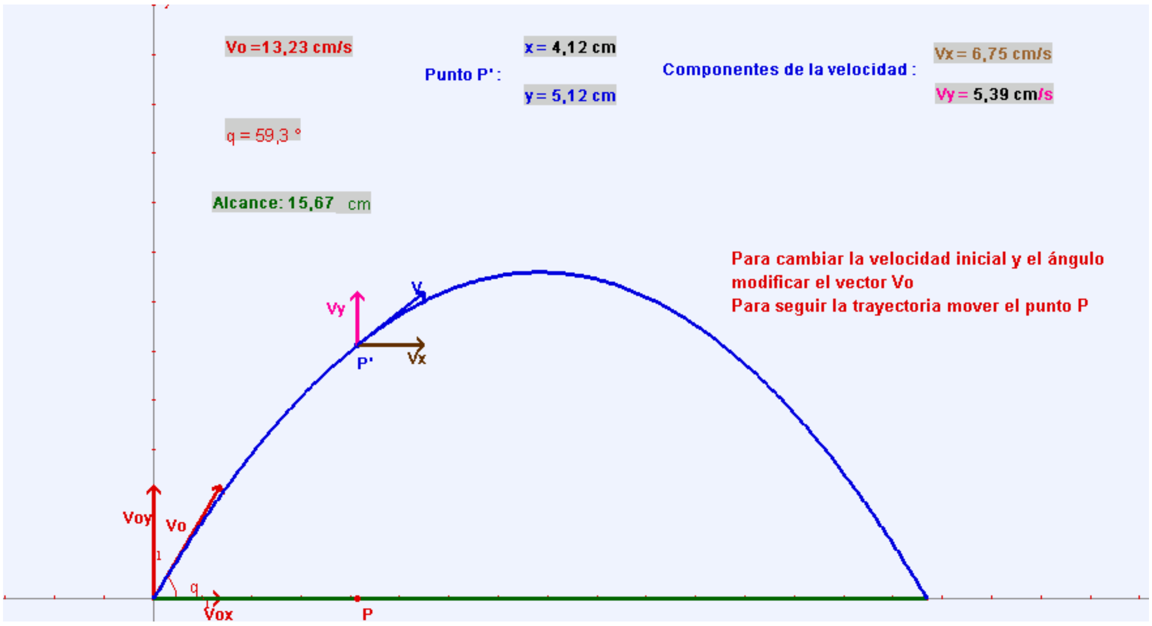
Por otro lado, en el estudio de las cónicas (que conjuga de forma armónica las diferentes ramas de la geometría: sintética, métrica, analítica, proyectiva, diferencial,...) resalta el carácter global de las matemáticas: "El carácter unitario de las Matemáticas reside en la esencia intrínseca de esta Ciencia; pues la Matemática es el fundamento de todo conocimiento científico riguroso" (*Hilbert)*.



El módulo está estructurado en cinco apartados. Los cuatro primeros responden a la división métrica de las cónicas: Circunferencia, Elipse, Hipérbola y Parábola; y recogen todos los contenidos que, sobre esta materia, contemplan los currículos de Matemáticas y Educación Plásticas y Visual de la Educación Secundaria. El quinto, rotulado Aplicaciones Físicas, está dedicado a mostrar las aplicaciones de las cónicas a la física incluidas en los currículos de la misma etapa.

Como en el módulo de la *Geometría del Triángulo*, las aplicaciones están presentadas en *Cabri-Web* para que el alumno pueda comprobar de forma interactiva las propiedades más importantes y establecer conjeturas





• Introducción	
• Las cónicas	
• Circunferencia	o Definición de circunferencia o Elementos de la circunferencia o Ecuación reducida de la circunferencia o Ecuación general de la circunferencia o Tangentes o Potencia de un punto respecto de una circunferencia o Eje radical de dos circunferencias
• Elipse	o Definición de elipse o Elementos de una elipse o Ecuaciones de la elipse o Construcciones o Tangencias
• Hipérbola	o Definición o Elementos de la hipérbola o Ecuaciones de la hipérbola o Construcciones o Tangencias o Asíntotas de la hipérbola
• Parábola	o Definición de parábola o Elementos de la parábola o Ecuación de la parábola o Tangencias
• Aplicaciones físicas	o Tiro parabólico o Interferencias de ondas o Segunda Ley de Kepler o Trayectorias de satélites espaciales
• Actividades	
• Referencias	

Cónicas

6.2. Relación con el currículo

<table>
<tr><th></th><th>4º ESO</th><th>1º BACHILLERATO</th><th>2º BACHILLERATO</th></tr>
<tr><td rowspan="2">MATEMÁTICAS</td><td>Objetivos.
- Reconocer la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola como secciones de un cono y como lugares geométricos.
- Apreciar la presencia de las cónicas en la vida cotidiana y en la naturaleza.</td><td>Objetivos.
- Reconocer la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.
- Obtener la ecuación de una cónica a partir de su definición como lugar geométrico.
- Conocer que las cónicas pueden determinarse mediante una ecuación de segundo grado.
- Determinar los elementos de una cónica a partir de su ecuación.
- Estudiar la posición relativa entre recta y cónica.
- Apreciar la presencia de las cónicas en la vida cotidiana y en la naturaleza.</td><td>Nota: En general, las cónicas se imparten en Matemáticas I de 1º de Bachillerato pero algunos centros prefieren impartirla en 2º o repartir los contenidos a lo largo de los dos cursos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos.
- Circunferencia: Definición y propiedades.
- Elipse: Definición y propiedades.
- Hipérbola: Definición y propiedades.
- Parábola: Definición y propiedades.
- Representar gráficamente parábolas definidas por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.
- Excentricidad de una cónica
- Incorporar al lenguaje habitual los términos: circunferencia, elipse, hipérbola, parábola, focos, excentricidad,..
- Sensibilidad para apreciar la presencia de las cónicas en la vida cotidiana.</td><td>Contenidos.
LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS:
- Circunferencia.
Definición. Ecuación y propiedades.
Potencia de un punto con respecto a una circunferencia.
- La Elipse
Definiciones. Ecuación y elementos más importantes. Diámetros conjugados.
- La Hipérbola
Definiciones. Ecuación y elementos más importantes. Asíntotas.
- La Parábola
Definiciones. Ecuación y elementos y propiedades de la curva.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">MATEMÁTICAS DE LA FORMA</td><td rowspan="2"></td><td>Objetivos.
- Conocer el trazado de las distintas cónicas y sus propiedades.
- Trazar tangentes a las cónicas.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Contenidos.
- Lugares geométricos elementales: Mediatrices y bisectrices.
- Circunferencia y círculo: Secantes, tangentes y ángulos en la circunferencia. Eje radical.
- Envolventes de rectas: Trazado de la elipse como envolvente.
- Trazado de la parábola e hipérbola: Estudio de sus propiedades, diferentes construcciones.</td></tr>
</table>

	3º ESO	1º BACHILLERATO	2º BACHILLERATO
EDUCACIÓN PLÁSTICA Y VISUAL	**Objetivos.** - Conocer los trazados geométricos elementales y los referentes a tangencias y enlaces. - Estudiar la posición relativa entre dos circunferencias.	**Objetivos.** - Definir las cónicas y sus elementos. - Conocer las relaciones fundamentales entre sus elementos. - Trazar rectas tangentes a las cónicas desde un punto cualquiera de ellas y desde un punto exterior.	**Objetivos.** - Calcular la potencia de un punto respecto de la circunferencia. - Determinar el eje radical de dos circunferencias.
	Contenidos. *TANGENCIAS Y ENLACES* - Tangencia entre recta y circunferencia y circunferencias entre sí. - Posiciones entre circunferencias.	**Contenidos.** *- Circunferencia.* *Definición Ecuación y propiedades* *CURVAS TÉCNICAS:* *- La Elipse* Definiciones. Ecuación y elementos más importantes. Diámetros conjugados. *- La Hipérbola* Definiciones. Ecuación y elementos más importantes. Asíntotas. *- La Parábola* Definiciones de la parábola. Ecuación y elementos y propiedades de la curva. *TANGENCIAS.* - Análisis de las posiciones relativas entre recta y circunferencia, y entre dos circunferencias. - Trazado de rectas tangentes a las curvas cónicas. - Estudio de los casos más relevantes de tangencias en la práctica del Dibujo Técnico, aplicando lugares geométricos. - Aplicaciones de las tangencias en la definición de formas.	**Contenidos.** *- Potencia, Eje Radical y Centro Radical* Definición de potencia, eje radical y centro radical.

Las actividades se presentan graduadas en dos niveles de dificultad:

(**) Segundo Ciclo de la ESO.

Las actividades que se proponen en este nivel han de servir para que los alumnos:

- Reconozcan la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.
- Conozcan que éstas se obtienen como intersección de una superficie cónica y un plano, y deduzcan cómo debe ser el corte para que el resultado sea una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola.
- Describan las cónicas como lugares geométricos. Definan sus elementos y conozcan las relaciones que se establecen entre ellos.
- A partir de construcciones realizadas, observen como evolucionan las gráficas de las cónicas cuando se modifican sus elementos. Y relacionen el tipo de cónica con su excentricidad.

- Conozcan las ecuaciones reducidas de las cónicas. Y estimen el número de datos que son necesarios para determinar la ecuación de una cónica.
- Determinen, a partir de las ecuaciones reducidas, los elementos de una cónica.
- Tracen las rectas tangentes a las cónicas en uno de sus puntos y desde un punto exterior.
- Aprecien la presencia de las cónicas en la vida cotidiana. Y adquieran una visión crítica ante figuras que puedan representar elipses, hipérbolas y parábolas.
- Adquieran algunas nociones sobre la historia de las cónicas y valoren el esfuerzo de los matemáticos que estudiaron sus propiedades.

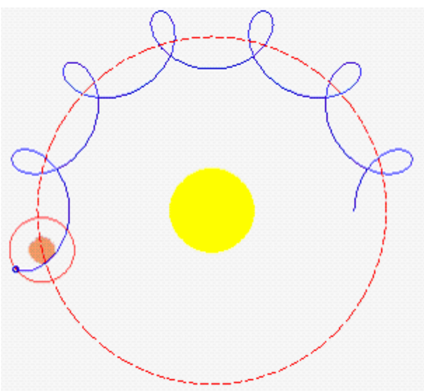
(***) Bachillerato.

Junto con las anteriores, se proponen actividades para que los alumnos:

- Conozcan que las cónicas pueden determinarse mediante una ecuación de segundo grado. Y estudien qué condiciones deben cumplir los coeficientes para definir una cónica determinada cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados.
- Determinen los elementos de una cónica, a partir de su ecuación, completando cuadrados. Y, una vez determinados estos elementos, dibujen la cónica.
- Obtengan la ecuación de una cónica a partir de su definición como lugar geométrico.
- Calculen la potencia de un punto respecto de una circunferencia y determinen el eje radical de dos circunferencias.
- Estudien la posición relativa entre cónicas, y entre cónicas y rectas. (Se sugiere que los alumnos planteen y dibujen las distintas posiciones relativas y determinen las coordenadas de los puntos de corte, si los hay).
- Hallen la ecuación de la recta tangente a una parábola.

7. CICLOIDES

7.1. Introducción

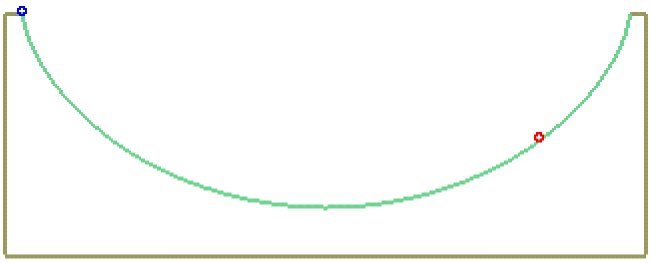


Dadas dos curvas tangentes, si fijamos una de ellas y hacemos rodar la otra sobre la fija, los puntos de la móvil o invariablemente unidos a ella, describen curvas llamadas *ruletas*.

Estas curvas, que son de gran belleza estética y gozan de propiedades cinemáticas interesantes, han desempeñado un papel importante en la historia del arte y en desarrollo de la mecánica.

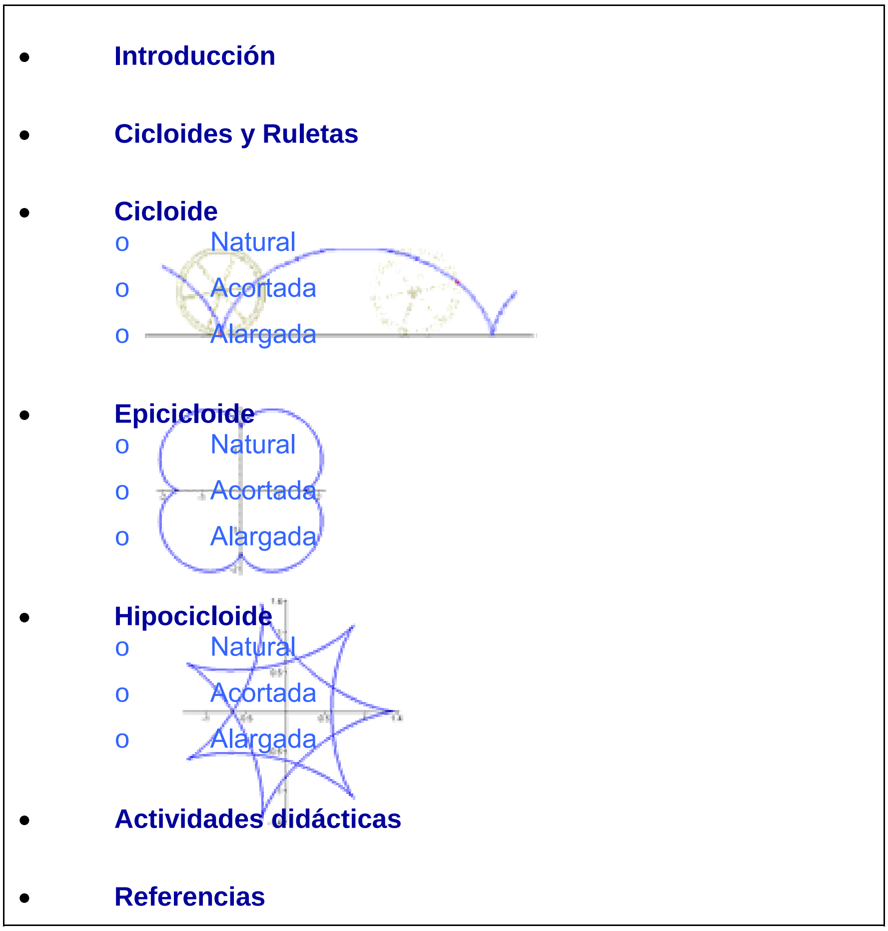
Hiparco (190-120 a. C.), trató de explicar los complicados movimientos de los planetas (tomando como referencia la Tierra) suponiendo que describían *epicicloides* (ruletas en las que la curva fija y la móvil son circunferencias).

Galileo (1564-1642) propuso usar *cicloides* (la línea fija es una recta y la que rueda sobre ella una circunferencia) en arquitectura ya que la cicloide es el arco de mayor resistencia estructural. Huygens (1629-1665) descubrió una curiosa propiedad acerca de esta curva:



"Sobre un arco de cicloide invertida, un objeto abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento, se deslizará desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo independientemente del punto de partida".

El módulo consta de las siguientes partes:



Cicloides

En cada uno de estos apartados el alumno puede visualizar como se generan las cicloides a partir de la trayectoria de un punto. Para ello, se ha utilizado el programa *Maple V Release 5 v. 5.00*, que permite crear imágenes en formato GIF que pueden ser visualizadas directamente sin necesidad de disponer de ninguna licencia.

7.2. Relación con el currículo

	1º BACHILLERATO	**2º BACHILLERATO**
EDUCACIÓN PLÁSTICA	**Objetivos.** - Analizar y estudiar las curvas cicloides. - Construir las curvas cicloides.	**Objetivos.** - Conocer las curvas cicloides y su trazado. - Trazar la envolvente de una circunferencia.
	Contenidos. *CURVAS CÍCLICAS*. - Curvas y superficies. - Análisis de la astroide. - Estudio de la cicloide. - Envolventes de círculos y de curvas: - Construcción y análisis de la envolvente de la parábola, la cardioide y la nefroide.	**Contenidos.** *CURVAS CÍCLICAS.* - Cicloide. Epicicloide. Hipocicloide. Envolvente de la Circunferencia. - Estudio de diversos métodos gráficos para rectificar una circunferencia. - Concepto de curva cíclica y trazados de cicloides, epicicloides e hipocicloides. - Trazado de la envolvente de la circunferencia.
MATEMÁTICAS		**Objetivos.** - Adquirir el concepto de lugar geométrico. - Analizar y estudiar las curvas cicloides.
		Contenidos. - Concepto de lugar geométrico - Concepto de cicloide y determinación de algunas de sus propiedades geométricas y mecánicas más importantes. - Concepto de epicicloide e hipocicloides. Identificación de algún caso particular - Determinación de lugares geométricos a partir de sus propiedades geométricas, mecánicas o algebraicas. - Determinación de las ecuaciones cartesianas de la cicloide y de algunas epicicloides o hipocicloides notables.
MATEMÁTICAS DE LA FORMA	**Objetivos.** - Analizar y estudiar las curvas cicloides. - Construir las envolventes de la circunferencia y de la parábola. - Utilizar la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de elementos geométricos para su uso y obtención de otros nuevos.	
	Contenidos. - Curvas y superficies. - Análisis de la astroide. - Estudio de la cicloide. - Envolventes de círculos y de curvas. - Construcción y análisis de la cardioide, envolvente de la parábola, cardioide y nefroide.	

Las actividades propuestas están diseñadas para ser utilizadas en las siguientes asignaturas:

- Taller de Matemáticas de 4º de la E.S.O.
- Matemáticas II del Bachillerato de Tecnología y de Ciencias de la Naturaleza
- Matemáticas de la Forma del Bachillerato de Artes.
- Dibujo Técnico de Bachillerato de Tecnología y de Ciencias de la Naturaleza

Si bien, puede utilizarse como complemento en cualquier asignatura de Matemáticas o Educación Plástica y Visual de la Educación Secundaria.

(*) **Taller de Matemáticas de 4º ESO**

- **La "visualización" de las cicloides** como curvas mecánicas generadas por la trayectoria de un punto y su construcción con materiales adecuados puede servir para introducir de forma intuitiva el concepto de lugar geométrico.
- **La búsqueda de métodos sencillos** (sin herramienta matemática) para relacionar la longitud de un arco de cicloide con el diámetro del círculo o la superficie que encierra un arco de cicloide con la superficie del círculo, permite la formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas.
- En general, las actividades previstas en esta aplicación permiten **identificar las formas y relaciones especiales** que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan", que es uno de los objetivos previstos en las en las *Enseñanzas Mínimas para la ESO* (R.D. 1007/1991) para esta etapa.

(**) **Matemáticas II (Bachilleratos de Tecnología y de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud)**

- El currículo de Matemáticas II contempla el **estudio de lugares geométricos**. Y, en particular, de las cicloides, hipocicloides y epicicloides como el lugar geométrico descrito por la trayectoria de un punto. Las ecuaciones más sencillas de estas curvas, sus propiedades y su presencia en la ciencia y en la técnica.

(**) **Matemáticas de la Forma (Bachillerato de Artes)**

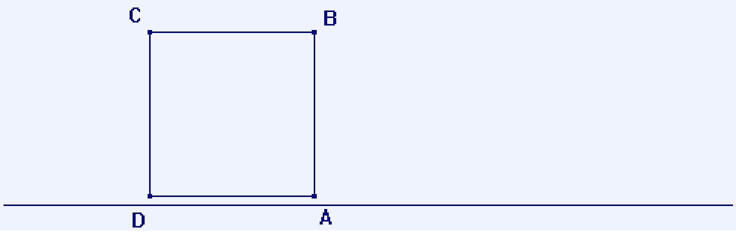
- En esta asignatura abundan los contenidos relacionados con los lugares geométricos obtenidos como trayectorias de puntos (curvas mecánicas). Tras estudiar la cicloide, hipocicloide y epicicloide, el currículo se centra en el análisis de los casos particulares más notables: cardioide, nefroide, deltoide y astroide. El enfoque que debe darse al estudio de estas curvas contempla un desarrollo en profundidad de los procedimientos relacionados con el **trazado de estas curvas**. La medición de áreas y longitudes deben realizarse con técnicas experimentales o razonamientos intuitivos que no requieran del uso del cálculo integral.

(**) **Dibujo Técnico (Bachilleratos de Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y Artes)**

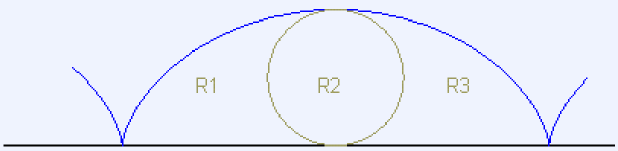
- El currículo de esta asignatura incluye la **construcción** de las cicloides, epicicloides e hipocicloides normal, alargada y acortada. Trazado de **tangentes y normales**. Y la construcción de la **envolvente** de la circunferencia.

Ejemplo de actividades propuestas

1. (*) Recorta en cartulina un cuadrado ABCD y hazlo rodar sobre la recta r como indica la figura: primero gira alrededor de A hasta que la arista DC quede horizontal, después alrededor de B, etc. Dibuja con detalle la trayectoria que sigue el punto B. Investiga la trayectoria de otros puntos. Prueba con otros polígonos. (triángulos,...).(sitúa el ratón sobre la figura que hay bajo estas líneas)



7. (*) *Galileo* conjeturó que el área encerrada por un arco de cicloide es tres veces la del círculo generador y *Roberval* corroboró esta conjetura. Compruébalo construyendo dichos recintos con una chapa (de madera, plástico, metal,...) y pésalos.



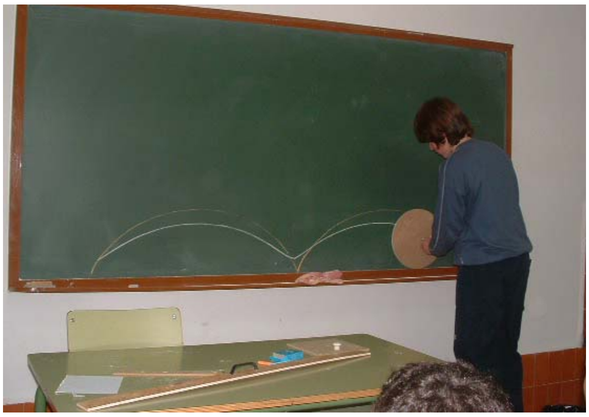
La superficie de cada una de los recintos R1, R2 y R3 es π r^2.

7.3. Orientaciones didácticas

La metodología que proponemos, en forma resumida, sigue la secuencia de trabajo expuesta en los puntos siguientes.

1. Se forman **pequeños de grupos de trabajo** a los que se propone la elección de un problema relacionado con la geometría de cicloides o fractales. La propuesta de trabajo en equipos, permite desarrollar habilidades sociales. El trabajo en pequeño grupo facilita

las interacciones alumno-alumno. La ejecución de una tarea científica colectiva suele ser mejor que la individual, porque la actuación conjunta de todos los miembros del grupo, permite estructurar mejor las actividades y evitar el desánimo porque es más fácil encontrar estrategias de resolución en grupo. Se ha procurado que los materiales necesarios para llevar a cabo las actividades estén al alcance de todos o puedan construirse con materiales caseros.



2. Se elabora un **plan destinado a resolver el problema** planteado, que incluye la **exploración de la información contenida en la aplicación multimedia** y la búsqueda de una estrategia de resolución acorde con los conocimientos previos necesarios, con el curso al que pertenecen los alumnos y el nivel de los grupos de trabajo. En el caso de los alumnos de ESO, es preciso incidir más en aspectos procedimentales, aunque conviene resaltar que se trata de conjugar aspectos conceptuales con contenidos procedimentales. Hay que tener en cuenta que, en la enseñanza de las Matemáticas y de las Ciencias, se trata de **desarrollar destrezas** dirigidas a la elaboración estrategias destinadas a la resolución de problemas (o cumplimentar una determinada demanda u objetivo). Los estudiantes emplean estrategias de aprendizaje cuando son capaces de ajustar lo que hacen (y lo que piensan) a las exigencias de la actividad que tiene que realizar.

3. Se **resuelven los problemas planteados, de forma tradicional (lápiz y papel) y se analizan los resultados.** Conviene que en el análisis de resultados se adelanten las soluciones que cabría esperar en determinadas situaciones. Con posterioridad **se compara** con las soluciones que se sugieren en las actividades contenidas en cada sección.

4. Los resultados obtenidos se Presentan a los compañeros en clase, describiendo el planteamiento del problema y el modo en que se ha obtenido la solución.

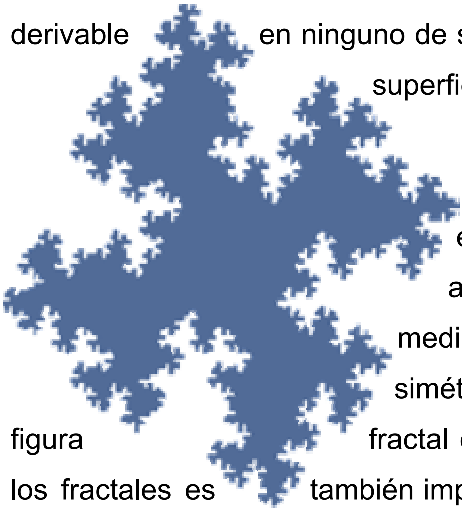
Podría pensarse que la realización de actividades "sencillas" y "diferentes" a las tradicionales de clase, "distraen" al alumno y rompen el hilo conductor teórico programado en el curriculum, lo que redundaría en detrimento del aprendizaje conceptual. Como respuesta a esta idea cabe indicar que la enseñanza no persigue, como ingenuamente suele aceptarse, la acumulación de conocimientos – entendida como suma de aprendizajes puntuales - sino la reestructuración de la estructura mental del alumno, quien ha de adaptarla a los nuevos objetos de aprendizaje.

5. Se ensayan también las soluciones que se dan, a título de hipótesis, en el análisis de resultados. Se abordan otros problemas que contemplen todos los casos posibles, siguiendo una secuencia de menor a mayor complejidad.

8. FRACTALES

8.1. Introducción

Las cónicas o las cicloides son ejemplos de curvas mecánicas que responden muy bien al concepto clásico de curva como el lugar geométrico de las posiciones de *un punto en movimiento*. Sin embargo, a principios del siglo XX surgieron numerosas curvas "patológicas" que mostraban la fragilidad del concepto cinemático de curva. Por ejemplo, la curva de Hilbert que pasa por todos los puntos del plano, o el cristal de nieve de Helge von Koch, una curva cerrada continua, no derivable en ninguno de sus puntos, de longitud infinita y que, sin embargo, delimita una superficie de área finita.



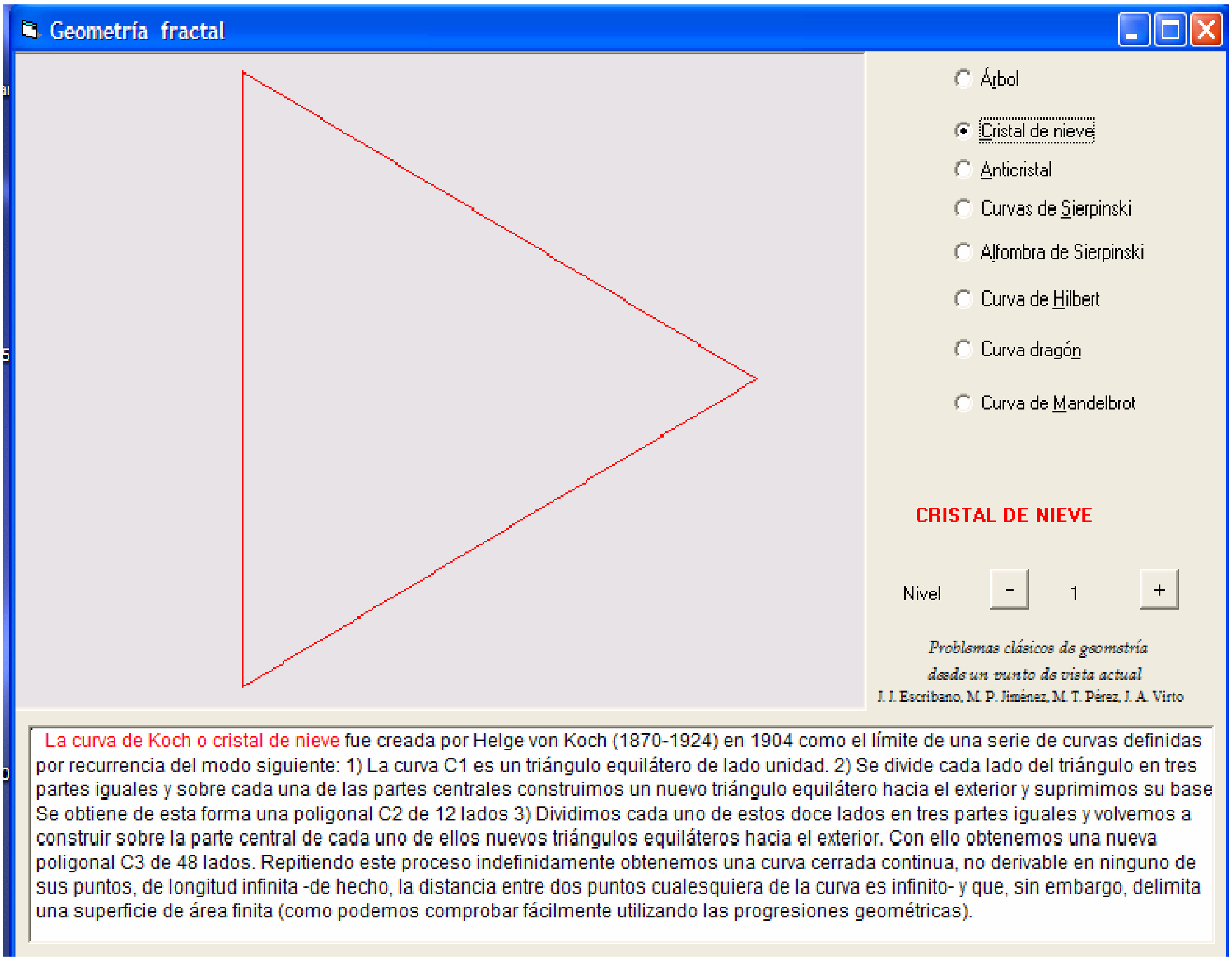
Con la irrupción de los ordenadores, *Mandelbrot* creo en 1960 una nueva geometría (geometría fractal) dedicada al estudio de estas curvas que hoy encuentran numerosas aplicaciones en diversas disciplinas: matemáticas, computación, medicina, industria,…Las figuras fractales no son necesariamente simétricas. No obstante, presentan una gran armonía ya que cada figura fractal contiene infinitas copias de sí misma. Por ello, la presencia de los fractales es también importante en el diseño, la arquitectura la música y, en general, en el arte actual.

Paralelamente la presencia de los fractales en la web se multiplica rápidamente y es fácil acceder a páginas con amplia información técnica e imágenes espectaculares. Por el contrario, nosotros insistimos en los aspectos didácticos y nos servimos de estas curvas para abordar diferentes aspectos: concepto de límites, continuidad, cálculo de áreas, recursividad, homotecia,…

Nuestra página permite descargar un fichero, *Fractales.exe*, realizado en *Visual Basic*, donde el alumno puede leer y observar como se construyen diversos fractales paso a paso:

- Árbol
- Cristal de Nieve
- Anticristal de Nieve
- Alfombra de Sierpinski
- Curva de Sierpinski

- Curva de Hilbert
- Curva de dragón
- Curva de Mandelbrot



8.2. Relación con el currículo

El estudio de los fractales sólo aparece recogido en la asignatura de Matemáticas de la Forma del Bachillerato de Artes. Sin embargo, consideramos que estas curvas ofrecen la posibilidad de desarrollar algunos aspectos del currículo de otras materias de Matemáticas y Educación Plástica y Visual a lo largo de la Educación Secundaria.

(*) **Primer Ciclo de la ESO**

Se proponen actividades del siguiente tipo:

- **Describir las imágenes fractales** identificando la parte que se reitera indefinidamente. Con ello, pretendemos que el alumno utilice el lenguaje y los métodos habituales de las matemáticas para comunicarse de manera precisa y rigurosa. Del mismo modo, estas actividades contribuyen a que el alumno identifique formas y relaciones espaciales, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas.

- **Dibujar y realizar** con diferentes materiales, algunos fractales (en sus primeros niveles). En la práctica hemos podido comprobar que muchos alumnos (incluso de los que no tienen interés por la materia) son sensibles a la belleza de estas construcciones y se sienten motivados por ellas. Por otro lado, estas actividades deben contribuir a que el alumno comprenda las relaciones entre el lenguaje visual y plástico y el lenguaje matemático, y favorecer la adquisición de las técnicas básicas para dibujar con precisión figuras geométricas.
- **Determinar la longitud, y el área** limitada por una curva fractal en sus primeros niveles y cuantificar diferentes elementos (número de lados, de triángulos,...). Esto permite que el alumno utilice diferentes conceptos geométricos, manipule expresiones numéricas e identifique y describa regularidades, pautas y relaciones en formas geométricas similares.
- **Buscar fractales en la web y en la naturaleza**. Estas actividades permiten, por un lado, que el alumno se familiarice con la búsqueda (cada vez más necesaria) de información en Internet. Y, por otro, lado que el alumno conozca e identifique las formas espaciales, para conseguir un mejor conocimiento del mundo real.

(**) Segundo Ciclo de la ESO

- En este ciclo se introducen los conceptos de sucesión, límite de una sucesión, progresión geométrica. Por ello, consideramos que es el momento de pedir al alumno que **desarrolle procesos de inferencia**, descubriendo leyes generales para un fractal de nivel *n* a partir de los datos obtenidos en los primeros niveles. En particular, se propone que el alumno calcule la **longitud y el área** encerrada por un curva fractal mediante paso al límite.
- Las curvas fractales deben servirnos también para profundizar en los conceptos de **semejanza, movimiento y homotecia** en el plano.
- Las actividades previstas en esta aplicación permiten **identificar las formas y relaciones especiales** que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan" (R.D. 1007/1991).

(***) Bachillerato

- Los fractales son un buen pretexto para que los alumnos de bachillerato reflexionen sobre los siguientes conceptos:

  \- ***Longitud y área***: la curva de Koch, por ejemplo, tiene longitud infinita -de hecho, la distancia entre dos puntos cualesquiera de la curva es infinito- y, sin embargo, delimita una superficie de área finita. La curva de Sierpinski ocupa totalmente el cuadrado en que se inscribe y limita una superficie cuya área son los 5/12 del área de dicho cuadrado.

- ***Continuidad y derivabilidad***: en la aplicación informática hemos presentado diversas curvas cerradas que son continuas, y no derivables en ninguno de sus puntos.

- ***Dimensión*:** existen fractales, como la curva de Hilbert o la curva de Sierpinski, que pasan por todos los puntos de una superficie. Si la dimensión de una curva es uno y la de una superficie es dos, ¿cuál será la dimensión de estas curvas que rellenan el plano?

- Los fractales son un ejemplo excelente de procedimientos **recursivos**. Dada la importancia de este concepto en matemáticas e informática, se proponen algunas actividades dedicadas a que los alumnos se habitúen a utilizar procedimientos recursivos.
- Las curvas fractales forman parte del currículo de la asignatura de Matemáticas de la Forma del Bachillerato de Artes. Por ello, hemos incluido actividades que tienen por como objetivo prioritario el **estudio** de este tipo de curvas en sí mismas.

<u>Ejemplos de actividades propuestas de fractales</u>

3. a) (*) Observa la curva de Koch o cristal de nieve y completa el siguiente cuadro:

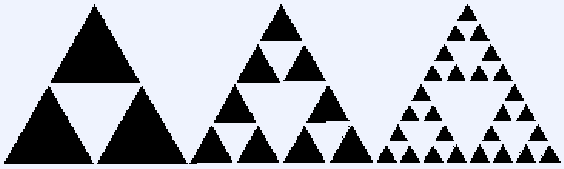
Nivel	1	2	3	4
Número de Vértices	3	3+3.3=12		
Número de lados	3	3.4=12		
Longitud de un lado	1	1/3		
Perímetro de la figura	3	4		
Área de la figura	$A=\frac{\sqrt{3}}{4}$	A + A/3		

b) (**) A partir de los datos obtenidos en la tabla anterior encuentra una fórmula general para calcular el área y el perímetro de la curva de Koch de nivel n. ¿Cuál es la longitud y área limitada por la curva de Koch?

4. (**) Calcula el área limitada por la curva anticristal de nieve.

9.

a. (*) La alfombra de Sierpinski se puede generalizar para cualquier polígono regular. Así, el triángulo de Sierpinski (que es la figura obtenida en el ejercicio anterior) se obtiene del siguiente modo:



En un triangulo equilátero de lado 1 se marcan los puntos medios de sus lados y se unen formando cuatro triángulos equiláteros de lado 1/2 y quitamos el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente.

b. Intenta conseguir, siguiendo un proceso análogo al anterior, el hexágono de Sierpinski

c. Visita la página http://www.mathcurve.com/fractals/fractals.shtml de la Encyclopédie des Formes Mathématiques Remarquables y compara la figura que acabas de obtener con las que allí se representan.

9. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se reconoce que los medios informáticos ofrecen posibilidades interesantes en el proceso de enseñanza/aprendizaje en general, y de Matemáticas y Educación Plástica y Visual en particular, pero se sabe que introducen ciertos sesgos, valores y características propias. Por ello, se necesita conocer la forma en la que han de integrarse en el desarrollo del currículo. En esta experiencia se muestra cómo puede combinarse el trabajo habitual de clase, de resolución tradicional de problemas de lápiz y papel, con el empleo de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación,

Las actividades presentadas y el contenido del sistema multimedia tienen una perspectiva interdisciplinar que integra las dos áreas citadas. Este carácter interdisciplinar permite a alumnos y a profesores establecer conexiones entre los conocimientos de diferentes áreas y aumentar la significatividad del aprendizaje. Además se logra adquirir una visión del aprendizaje más cercana a los problemas cotidianos, dadas las características de los problemas propuestos. No se han olvidado las relaciones Ciencia-Tecnología-Sociedad, porque se muestran aplicaciones de la geometría a otras áreas como la tecnología, el Arte o la Física, se mencionan episodios de la historia de la Ciencia y se citan personajes históricos que han contribuido al desarrollo de la Ciencia, las Matemáticas, la Tecnología y el bienestar social.

La interactividad de la aplicación facilita la comprensión de contenidos conceptuales de geometría y procedimentales; y permite adaptar el ritmo al progreso del alumno, porque los alumnos pueden visualizar paso a paso la solución de los ejercicios.

Se ha puesto de relieve que los alumnos realizan con agrado las actividades que se les propone, incluso aquellos que presentan mayores dificultades de comprensión o desinterés, debido entre otras razones a que los sistemas multimedia son atractivos para los alumnos habituados a navegar con el ordenador y les permite trabajar a su ritmo. Por último, cabe resaltar que se vislumbra un campo extenso de utilización de las aplicaciones multimedia en otras áreas de la Geometría, Matemáticas, Dibujo, Física, etc., de una forma integrada en el currículo porque además de su utilidad en el proceso de enseñanza/aprendizaje se pueden hacer compatibles con el trabajo habitual del aula.

REFERENCIAS

Bibliografía

AKKAR, M. (1985) *Les mathématiques par les problèmes.* Sochepress.

ALEKSANDROV A. D. *et al.* (1976) *La matemática: su contenido, método y significado*. Vol. 1. Madrid, Alianza Universal.

ALMODÓVAR, J. A. *et al.* (1999) *Órbita 2000 Matemáticas 2º*. Madrid, Santillana.

ALONSO, C. M. y GALLEGO, D. J. (1997) *La informática desde la perspectiva de los Educadores* (Tomos I y II). Madrid, UNED.

ÁLVAREZ, J. M. (1997) "Actividad multisesión con Cabri-Géomètre (La circunferencia de Feuerbach". Suma, 25 (junio 1997), 53-60.

ANTIBI, A *et al.* (1993) *Maths ?.* Paris, Éditions Nathan.

AYENSA, J. M. (2001) *Instrumentos de regulación y modelo de evaluación en el aula de Física.* Tesis doctoral (no public.). Madrid, UNED.

AYENSA, J. M., ROSADO, L. y LOS ARCOS, Mª. L. (1998) "El ordenador en trabajos prácticos. Análisis de una experiencia en el aula de Física en Educación Secundaria". *Contextos Educativos 1 (1),* 31-52.

BIASI, J. de (1981) "La cyclöide*". Boulletin de l´APMEP*, *328*, 250-258.

BOYER, C. (1988) *History of Analytic Geometry*. Pricenton Junction, The Scholar´s Bookshelf.

BOYER, C. (1992) *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Universal.

CALLEJO (1987) *La enseñanza de las Matemáticas*. Bilbao, Narcea.

CÁMARA TECEDOR, S. (1945) *Elementos de Geometría analítica por [...].* 3ª ed. Madrid, Talleres de Vda. de C. Bermejo.

CONDE, A.; GONZÁLEZ, M.; MIRA, M. (1974) *Dibujo técnico.* Barcelona, Ed. Teide.

COXETER, H. S. M. & GREITZER, S. L. (1993) *Retorno a la Geometría*. "La Tortuga, nº 1". Madrid, DSL-EULER.

Decreto 30/2002, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de La Rioja

Decreto 33/2004, de 29 de mayo, por el que se establece la Ordenación General y el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de La Rioja.

Decreto 34/2004, de 29 de mayo, por el que se establece la Ordenación General y el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de La Rioja.

DOU, A. (1970) *Fundamentos de la matemática.* 2ª ed. Barcelona, Labor.

DUNHAM, W. (1993) *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos.* Madrid, Pirámide.

DUNHAM, W. (2000) *Euler*. *El maestro de todos los matemáticos*. "La matemática en sus personajes, nº 6". Madrid, Nivola.

ETAYO MIQUEO, J. J. (1988) "Los caminos de la Geometría". En: *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1988) Curso de Conferencias sobre Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII*. Madrid, 11-29.

EUCLIDES (1991) *Elementos. Libros I-IV.* Madrid, Editorial Gredos.

EVES, H. (1981) *Great moments in mathematics (After 1650).* The Mathematical Association of America.

FIGUEIRAS, L. MOLERO, M., SALVADOR, A. ZUASTI, N. (2000) "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales", *Suma 35 (noviembre 2000)*, 45-54.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. (2001) *Pitágoras. El filósofo del número.* "La matemática en sus personajes, nº 9". Madrid, Nivola.

GUZMÁN OZÁMIZ, M. de (2002) *La experiencia de descubrir en geometría.* Madrid, Nivola.

GUZMAN, M. de (2002) *La experiencia de descubrir en geometría*. Madrid, ed. Nivola.

GUZMAN, M. de, COLERA, J., SALVADOR, A. (1987) *Matemáticas 2º B.U.P.* Madrid, Ed. Anaya.

GUZMÁN, M. et al. (1993) *Estructuras fractales*. Madrid, Ed. Labor.

GUZMAN, M. y COLERA. J. (1989) *Matemáticas II COU*. Madrid, Ed. Anaya.

HARDY, G. H. (1981) *Autojustificación de un matemático.* Barcelona, Ariel.

HERNÁNDEZ PEÑALVER, G. (1991) "Los orígenes de la geometría proyectiva". En: *Seminario de Historia de las Matemáticas I*. Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, 13-57.

IZQUIERDO ASENSI, F. (1980) *Geometría descriptiva.* Madrid, Ed. Dosssat S.A.

JORBA, J. Y SANMARTÍ, N. (1994) *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación continua.* Barcelona, MEC.

KLEIN, F. (1931) *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol. II geometría.* "Biblioteca de Matemática, nº 3". Madrid, Nuevas Gráficas. (Traducido por R. Fontanilla, el original es de 1908).

KLINE, M. (1994) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. (3 vols.). Madrid, Alianza Universidad.

KOSTOVSKI, A. (1984) *Construcciones geométricas mediante compás*. Moscú, Ed. Mir.

LAKATOS (1978) *Pruebas y refutaciones*. Madrid, Alianza.

LEVI, B. (2000) *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Libros Zorzal.

MANDELBROT, B. (1997) *La Geometría fractal en la naturaleza*. Barcelona, Tusquets.

MARTÍNEZ, A. y BERNAL, J. *Dibujo técnico 2º Bachillerato*. Madrid, Ed. SM.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2001) *Aspectos históricos de las matemáticas elementales.* Zaragoza, Prensa Universitaria de Zaragoza.

MORENO-MARÍN, J. C. (2002) "Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales". *Suma 40 (junio 2002)*, 91-104

POLYA, G. (1972) *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Ed. Trillas.

PUIG ADAM, P. (1980) *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. XV ed. Madrid, Ediciones Gómez Puig.

QUERALT LLOPIS, T. (1997) "Fractales en la ESO". *Suma 24 (junio 1997)*, 81-88.

Real Decreto 1345/1991 de 6 de septiembre (BOE de 13-9-1991), por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Real Decreto 1178/1992 de 2 de octubre de 1992 (BOE de 21-10-1992), por el que se establece las enseñanzas mínimas de Bachillerato.

Real Decreto 1179/1992 de 2 de octubre de 1992 (BOE de 21-10-1992), por el que se establece el Currículo de Bachillerato.

Resolución de 29 de diciembre de 1992, de la Dirección General de Renovación Pedagógica, por el que se establece el currículo de la materia optativa Matemáticas de la Forma correspondiente al Bachillerato de Artes

REY PASTOR, J. (1969) *Análisis Matemático*. 8ª ed, Buenos Aires, Ed. Kapelusz.

REY PASTOR, J. *y* PUIG ADAM, P. (1934) *Elementos de Geometría Racional. Tomo I. Geometría Plana.* Madrid, Ed. Calleja.

RÍO SÁNCHEZ, J. del (1996) *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid, Ed. Síntesis.

RODRIGUEZ ANNONI, R. (1959) *Al margen de la clase*. Zaragoza, Librería General.

ROSADO, L. y GONZÁLEZ, J. (1997) *Multimedia e Hipertexto. Aplicación en la enseñanza de las Ciencias y la Tecnología.* Madrid, UNED.

SANMARTÍ, N. (1998) *Evaluación en el área de Ciencias.* En: A. Medina *et al. Evaluación de los* *procesos y resultados de los aprendizajes de los estudiantes.* Madrid. UNED, 625-660.

SCHOENFELD, A. H. (1985) *Mathematical problem solving.* Orlando, Academic Press.

SHARIGUIN, I. (1986) *Problemas de Geometría. Planimetría.* Moscú, Ed. Mir.

THOM, R. (1973) *Developments in Mathematical Education*. Cambridge, Edited by A. G. Howson.

TRIGO, V. y CAMACHO, A. (1988) *Manual de Turbo Pascal para las Enseñanzas Medias*. Madrid, Ed. Anaya-Multimedia.

VIGIL, L. (1985) “Miscelánea de problemas clásicos de geometría elemental”. En: AAVV, *Aspectos didácticos de Matemáticas 1. Bachillerato*. Zaragoza, ICE de la Universidad de Zaragoza, 66-89.

WALUSINSKI, G. (1970) *Pourquoi une Mathématique moderne*?. Paris, Ed. Armand Colin.

XAMBÓ DESCAMPS, S. (1985) *Álgebra lineal y geometrías lineales*. Volumen II Barcelona, Ed. Eunibar.

ZAPATA, M. (1996) *Integración de la GEOMETRÍA FRACTAL en las Matemáticas, y en la Informática, de Secundaria: ¿Qué son y cómo pueden los fractales ayudar a representar y a organizar el espacio?* Murcia, Editada por el CPR Murcia II.

Direcciones de páginas de Internet

http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/desarg2.htm

http://www.ctv.es/USERS/pacoga/bella/htm/pascal.htm

http://www.mismates.net/matematicas/cabri/varignon.htm

http://huitoto.udea.edu.co

http://www.arrakis.es/~mcj/notas015.htm.

http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm (*Gacetilla matemática)*

http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html.

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/Problemas_de_conicas/Problemas_de_conicas.htm

http://www.cnice.mecd.es/mem2000/conicas/ejercicios/indiceej.htm

http://www.ctv.es/USERS/pacoga/bella/htm/malfatti.htm.

http://www.etsimo.uniovi.es/usr/adolfo/algebra5.html

http://www.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Torricelli/node1.html

http://www.mathcurve.com (*Encyclopédie des Formes Mathématiques Remarquables)*

http://www.fractovia.org

http://www.miajas.com/DibujoTec/conicas.htm